Corrigé du contrôle n°1

Exercice 1

1. $-2x^2+11x-9=0$ est une équation du second degré.
   On remarque que $x_1=1$ est solution.
   Il y a donc deux solutions x_1 et x_2. $x_1x_2=\dfrac{9}{2}$ donc $x_2=\dfrac{9}{2}$.
   L'ensemble des solutions est : $\mathscr{S}=\left\{1;\dfrac{9}{2}\right\}$.
2. $$\begin{aligned} 4(x+1)^2=(5x-7)^2 &\iff [2(x+1)]^2-(5x-7)^2=0\\ &\iff [2(x+1)-(5x-7][2(x+1)+5x-7]=0\\ &\iff (-3x+9)(7x-6)=0\\ &\iff x=3 \text{ ou } x=\frac{6}{7}\end{aligned}$$
   L'ensemble des solutions est donc : $\mathscr{S}=\left\{3;\dfrac{6}{7}\right\}$.
3. $$\begin{aligned} \frac{3x+1}{8}-\frac{10}{x-2}=\frac{35}{24} &\iff \frac{3x+1}{8}-\frac{10}{x-2}-\frac{35}{24}=0\\ &\iff \frac{3(3x+1)(x-2)-240-35(x-2)}{24(x-2)}=0\\ &\iff \frac{9x^2-50x-176}{24(x-2)}=0\\ &\iff 9x^2-50x-176=0 \text{ et } x\neq 2\end{aligned}$$
   $9x^2-50x-176$ est un trinôme du second degré.
   $\Delta=8836=94^2$.
   $\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines : $x_1=\dfrac{50+94}{18}=8$ et $x_2=\dfrac{50-94}{18}-\dfrac{22}{9}$.
   Ces deux solutions sont distinctes de 2, l'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\mathscr{S}=\left\{8;-\dfrac{22}{9}\right\}$.
4. $-2x^2+11x-12$ est un trinôme du second degré.
   $\Delta=25$, $\Delta>0$, il admet donc deux racines : $x_1=\dfrac{-11+5}{-4}=\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-11-5}{-4}=4$.
   Le coefficient du terme du second degré est $a=-2<0$.
   L'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x^2+11x-12\geqslant 0$ est donc : $\mathscr{S}=\left[\dfrac{3}{2};4\right]$.

Exercice 2

$x^2+2(m+2)x+6-2m^2-m=0$ est une équation du second degré. Cette équation admet deux racines distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif.
$\Delta=[2(m+2)]^2-4(6-2m^2-m)=4(m^2+4m+4)-24+8m^2+4m=12m^2+20m-8=4(3m^2+5m-2)$
$\Delta>0 \iff 3m^2+5m-2>0$.
$3m^2+5m-2$ est un trinôme du second degré. Son discriminant est $\delta=49$.
Il admet donc deux racines : $m_1=\dfrac{-5-7}{6}=-2$ et $m_2=\dfrac{-5+7}{6}=\dfrac{1}{3}$.
Le coefficient du terme du second degré est $a=3>0$ donc l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $\Delta>0$ est $]-\infty;-2[\cup\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

Exercice 3

1. Le coefficient du terme du second degré de la fonction f est $a = 1 > 0$ donc f est décroissante puis croissante. Elle est représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$.
   Le coefficient du terme du second degré de la fonction g est $a' = -2 < 0$ donc g est croissante puis décroissante. Elle est représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$.
2. Pour tout x réel, $f(x) = (x+1)^2 - 1$
   Pour tout x réel :
   $$\begin{aligned} g(x) &= -2\left[x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right] \\ &= -2\left[\left((x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 1\right] \\ &= -2\left[\left((x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] \\ &= -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} \end{aligned}$$
3. Le sommet de la parabole représentant f est $S_1(-1;-1)$ et on a vu le sens de variation de f, d'où son tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

   Le sommet de la parabole représentant g est $S_2\left(-\frac{3}{4};\frac{25}{8}\right)$ et on a vu le sens de variation de g, d'où son tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{25}{8}$	$\searrow$	

4. Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
   $$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff f(x) - g(x) = 0 \\ &\iff x^2 + 2x - (-2x^2 - 3x + 2) = 0 \\ &\iff 3x^2 + 5x - 2 = 0 \end{aligned}$$
   $3x^2 + 5x - 2$ est un trinôme du second degré. $\Delta = 49 > 0$, il admet donc deux racines $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = -2$.
   $f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9}$ et $f(-2) = g(-2) = 0$.
   Les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les points $A\left(\frac{1}{3};\frac{7}{9}\right)$ et $B(-2;0)$.
5. Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on étudie les signe de $f(x) - g(x) = 3x^2 + 5x - 2$.

$3x^2+5x-2$ est un trinôme du second degré qui admet 2 racines : $\dfrac{1}{3}$ et -2. On en déduit le tableau de signe de $f(x)-g(x)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en conclut que sur $]-\infty;-2[$ et sur $\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ et en dessous sur $\left]-2;\dfrac{1}{3}\right[$.

Exercice 4

1. (a) Dans le triangle ACH, on a : $N\in[AC]$, $M\in[AH]$ et $(MN)//(CH)$.
   On peut donc écrire, d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AH}{AM}=\dfrac{MN}{HC}$.
   $\dfrac{AH}{AM}=\dfrac{MN}{HC} \iff \dfrac{x}{8}=\dfrac{MN}{6} \iff MN=\dfrac{6x}{8}=\dfrac{3x}{4}$.

   (b) Dans le triangle BCH, on a : $P\in[BC]$, $Q\in[BH]$ et $(PQ)//(CH)$.
   On peut donc écrire, d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{BQ}{BH}=\dfrac{PQ}{CH}$.
   Or, comme $MNPQ$ est un rectangle, $PQ=MN=\dfrac{3x}{4}$.
   On a alors : $\dfrac{BQ}{BH}=\dfrac{PQ}{CH} \iff \dfrac{BQ}{4}=\dfrac{\frac{3x}{4}}{6} \iff BQ=\dfrac{x}{2}$.

   (c) $MQ=MH+HQ=(AH-AM)+(BH-BQ)=8-x+4-\dfrac{x}{2}=12-\dfrac{3x}{2}$.

2. (a) $S(x)=MQ\times MN=\dfrac{3}{4}x\left(12-\dfrac{3x}{2}\right)$.

   (b) Pour déterminer le maximum de $S(x)$, on étudie les variations de la fonction S. S est une fonction trinôme du second degré, on écrit sa forme canonique.
   $S(x)=-\dfrac{9}{8}x^2+9x=-\dfrac{9}{8}(x^2-8x)=-\dfrac{9}{8}[(x-4)^2-16]=-\dfrac{9}{8}(x-4)^2+18$.
   On en déduit le tableau de variation de S.

x	0		4		8
$S(x)$	0	$\nearrow$	18	$\searrow$	0

   L'aire est maximale lorsque $x=4$.

   (c) L'aire du triangle ABC est $\dfrac{1}{2}HB\times AB=\dfrac{12\times 6}{2}=36$.
   L'aire du rectangle est égale à la moitié de l'aire du triangle ABC lorsque $S(x)=18$.

$$\begin{aligned} S(x)=18 &\iff -\frac{9}{8}x^2+9x-18=0\\ &iff -\frac{9}{8}(x^2-8x+16)=0\\ &\iff x^2-8x+16=0\\ &\iff (x-4)^2=0\\ &\iff x=4 \end{aligned}$$

L'aire du rectangle est égale à la moitié de l'aire du triangle ABC lorsque $AM = 4$.