Corrigé du contrôle n°1

Exercice 1

1. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{8}{12} - \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75 \in \mathbb{D}$
2. $\dfrac{\frac{7}{6} - \frac{1}{3}}{4 + \frac{14}{9}} = \dfrac{\frac{7}{6} - \frac{2}{6}}{\frac{36}{9} + \frac{14}{9}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{50}{9}} = \frac{5}{6} \times \frac{9}{50} = \frac{5 \times 3}{2 \times 50} = \frac{15}{100} = 0,15 \in \mathbb{D}$
3. $\sqrt{18} - 2\sqrt{32} + 3\sqrt{8} = \sqrt{9 \times 2} - 2 \times \sqrt{16 \times 2} + 3\sqrt{4 \times 2} = 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$
4. $(2\sqrt{5} - 3)^2 + (6 + \sqrt{5})^2 = 20 - 12\sqrt{5} + 9 + 36 + 12\sqrt{5} = 70 \in \mathbb{N}$
5. $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - 1}{2 - 1} = -2 \in \mathbb{Z}$

Exercice 2

1. (a) $\frac{5}{6} \in I$ est faux : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ donc $\frac{1}{3} < \frac{5}{6}$
   (b) $-\frac{3}{4} \in I$ est vrai : $-\frac{3}{2} \leqslant -\frac{3}{4} < \frac{1}{3}$
   (c) $\frac{1}{2} \in J$ est faux : J est ouvert en $\frac{1}{2}$
   (d) $0 \in J$ est faux : $0 < \frac{1}{2}$
   (e) $0,33 \in I$ est vrai : $-\frac{3}{2} \leqslant 0,33 < \frac{1}{3}$
   (f) $10^{-1} \in J$ est faux : $10^{-1} = \frac{1}{10} < \frac{1}{2}$
2. (a) $x \in [-2;3] \iff -2 \leqslant x \leqslant 3$
   (b) $x \in]-\infty;4[\iff x < 4$
   (c) $x \in [2;+\infty[\iff 2 \leqslant x$
   (d) $x \in \left]3;\frac{11}{2}\right[\iff 3 < x < \frac{11}{2}$

Exercice 3

1. $3x + 2 \leqslant 0 \iff x \leqslant -\frac{2}{3}$, $\mathscr{S} = \left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]$
2. $5 - 3x < 0 \iff -3x < -5 \iff x > \frac{5}{3}$, $\mathscr{S} = \left]\frac{5}{3};+\infty\right[$.
3. $$\begin{aligned} 2(3x+5) - 5(x+2) \geqslant 4 &\iff 6x + 10 - 5x - 10 \geqslant 4 \\ &\iff x \geqslant 4 \end{aligned}$$
   $\mathscr{S} = [4;+\infty[$

4.
$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{5} - \frac{x-2}{3} < x+1 &\iff \frac{3(2x+3)}{15} - \frac{5(x-2)}{15} < \frac{15(x+1)}{15} \\
&\iff 6x+9-5x+10 < 15x+15 \\
&\iff x - 15x < 15 - 9 + 10 \\
&\iff -14x < -4 \\
&\iff x > \frac{4}{14} \\
&\iff x > \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

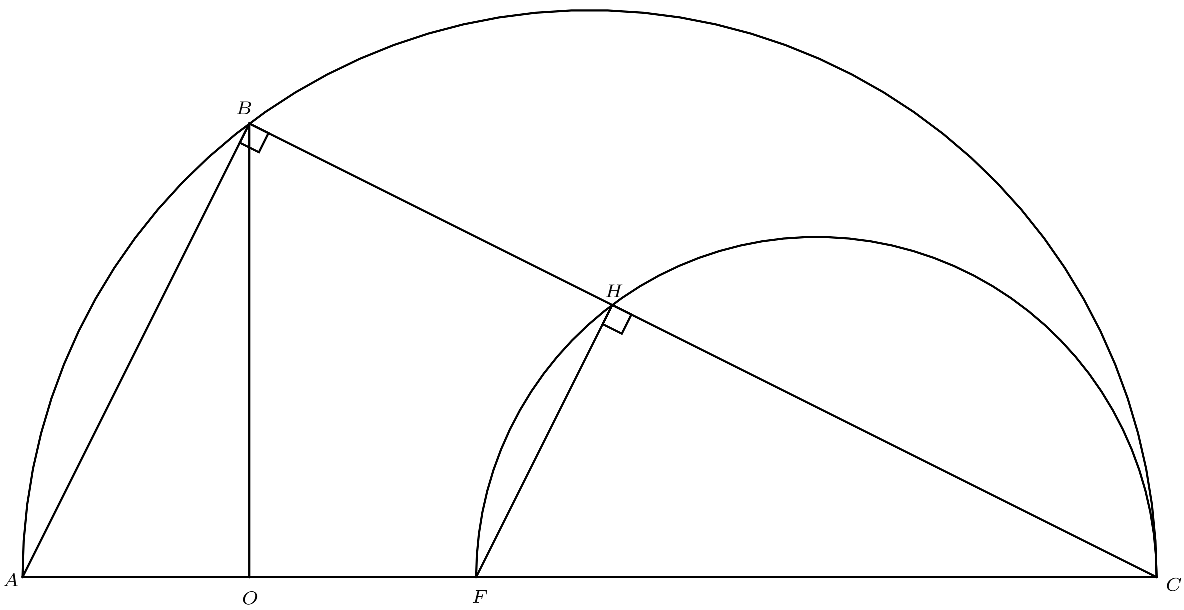
$\mathscr{S} = \left]\frac{2}{7}; +\infty\right[$.

5.
$$\begin{aligned}
(2x+1)^2 - 2(x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1) \leqslant 0 &\iff 4x^2+4x+1-2(2x^2-1) \leqslant 0 \\
&\iff 4x^2-4x+1-4x^2+2 \leqslant 0 \\
&\iff 4x+3 \leqslant 0 \\
&\iff x \leqslant -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$\mathscr{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right]$

Exercice 4

1.



2. Le triangle AOB est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$, donc $AB = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$.
Le triangle BOC est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore :
$BC^2 = BO^2 + OC^2 = 6^2 + 12^2 = 36 + 144 = 180$, donc $BC = \sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$.
3. $AB^2 + AC^2 = 45 + 180 = 225$.
$AC^2 = 15^2 = 225$.

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B, et le point B appartient au cercle de diamètre $[AC]$.

4. (a) Voir la figure ci-dessus.
   (b) On a montré que (AB) est perpendiculaire à (BC).
   Le triangle FHC est inscrit dans le cercle de diamètre $[FC]$, il est donc rectangle en H.
   (FH) est donc également perpendiculaire à (BC).
   On en déduit que (AB) est parallèle à (FH).
   (c) Les points C, H, B d'une part, C, F, A d'autre part sont alignés dans cet ordre. Les droites (FH) et (AB) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{CF}{CA} = \dfrac{CH}{CB} \iff \dfrac{9}{15} = \dfrac{CH}{6\sqrt{5}} \iff CH = \dfrac{9}{15} \times 6\sqrt{5} = \dfrac{9 \times 2\sqrt{5}}{5} = \dfrac{18\sqrt{5}}{5}$.