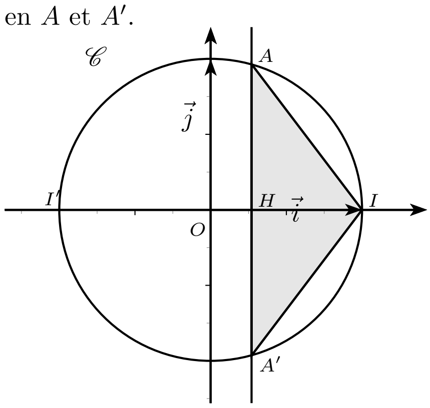
Contrôle n˚4

Exercice 1 (5 *points*)

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Etudier la limite de f en $+\infty$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$.
   Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x-5}{\cos(x)-4}$.
   (a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Etudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2 (4 *points*)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et les points I et I' de coordonnées respectives $(1;0)$ et $(-1;0)$. Par tout point H d'abscisse x du segment $[II']$, on mène la perpendiculaire à la droite (II') passant par H, elle coupe le cercle $\mathscr{C}$ en A et A'.



1. Calculer l'aire du triangle IAA' en fonction de x.
2. Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
   (a) Montrer que, pour tout x de $]-1;1[$, $f'(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer l'aire maximale du triangle IAA'. Quelle est alors la nature du triangle IAA' ?

Exercice 3 (11 *points*)

Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3-1}$.

Partie A : Question préliminaire

1. Dresser le tableau de variation de la fonction c définie sur $\mathbb{R}$ par $c(x) = x^3$.
2. Justifier que l'équation $x^3 = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et en déduire le tableau de signe de $x^3 - 1$.
3. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

Partie B : Recherche des asymptotes

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Etudier les limites de f à droite et à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

Partie C : Etude des variations de f

1. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x^3 - 3x^2 - 2$.
   (a) Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
   (c) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   (d) Dresser le tableau de signe de $g(x)$.
3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ et dresser le tableau de variation de f.

Partie D : Représentation graphique de la fonction f

Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (on tracera les asymptotes et on précisera le point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisse.