Contrôle n˚5

Exercice 1 (4 *points*)
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. L'équation $e^{2x} + 3e^x = -2$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$.
2. L'inéquation $[\ln(x)]^2 \leqslant -\ln x$ a pour ensemble de solutions $[e^{-1}; 1]$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = +\infty$.

Exercice 2 (4 *points*)

1. **Restitution organisée de connaissance**
   L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
   On suppose connus les résultats suivants :
   - La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée
   - $e^0 = 1$
   - Soit deux fonctions v et w définies sur l'intervalle $[A\ ;\ +\infty[$, où A est un réel positif. Si pour tout x de $[A\ ;\ +\infty[$, $v(x) \leqslant w(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x) = +\infty$.

   (a) Soit u la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $u(x) = e^x - x$.
   Etudier les variations de u sur $[0; +\infty[$ et en déduire son signe.

   (b) Soit φ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Etudier les variations de φ sur $[0; +\infty[$ et en déduire que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $\varphi(x) \geqslant 0$.

   (c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}x}$.

   (a) Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (b) Etudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3 (6 *points*)

Partie A
Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. Etudier les variations de u sur $]0; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. (a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$. On note α cette solution.

   (b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note :
- (Γ) la courbe représentative de la fonction ln ;
- A le point de coordonnées $(0; 2)$;
- M le point de (Γ) d'abscisse x appartenant à $]0;+\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
   (a) Justifier que f et g ont les mêmes variations sur $]0;+\infty[$.
   (b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de (Γ) noté P, dont on précisera les coordonnées.
   (c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à (Γ) en P. (on rappelle que deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1).

Exercice 4 (6 *points*)

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Etude du cas $k = 1$

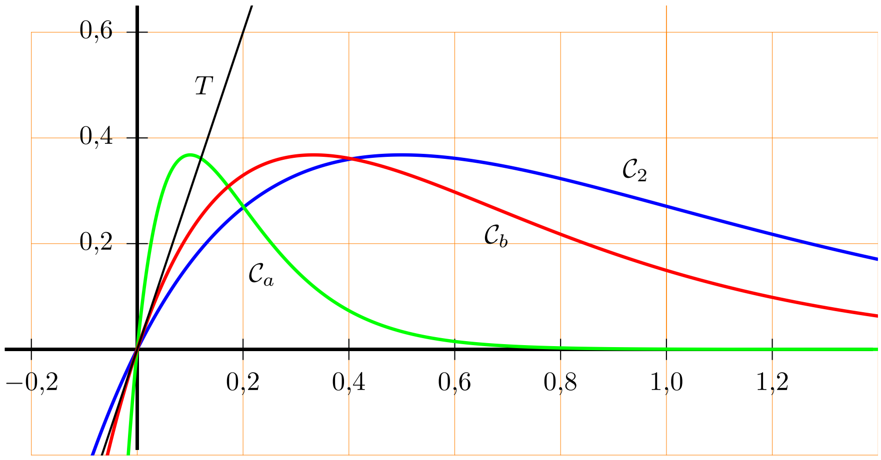
On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Etudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ ooù a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.
2. (a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1-kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

   (b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

   (c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

   (d) Ecrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.

   (e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.