Corrigé du contrôle n°4

Exercice 1

1. (a) $x \in \mathscr{D}_f \iff x - \dfrac{1}{x} \geqslant 0 \iff \dfrac{x^2-1}{x} \geqslant 0.$

   On dresse le tableau de signe du quotient :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   On en déduit : $\mathscr{D}_f = [-1;0[\cup]1;+\infty[$.

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc, par somm $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

   et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

   donc, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Etude de la limite en $-\infty$:

   $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = \infty$ donc, par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1}$,

   $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

   On a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   Etude de la limite en $+\infty$:

   Pour tout $x > 0$, $\sqrt{4x^2+1} + 2x \neq 0$,

   $f(x) = \dfrac{(\sqrt{4x^2+1} - 2x)(\sqrt{4x^2+1} + 2x)}{\sqrt{4x^2+1} + 2x} = \dfrac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}.$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} (4x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = \infty$ donc, par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+1}$,

   $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x) = +\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+1} + 2x) = +\infty$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x-5}{\cos(x)-4}$.

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc $\cos x - 4 \neq 0$, f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc $-5 \leqslant \cos x - 4 \leqslant -3$

   Comme la fonction est décroiassante sur $]-\infty;0[$, on a : $-\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{\cos x - 4} \leqslant -\dfrac{1}{5}$

   Pour tout $x > \dfrac{5}{3}$, $3x-5 > 0$, donc : $-\dfrac{3x-5}{3} \leqslant \dfrac{3x-5}{\cos x - 4} \leqslant -\dfrac{3x-5}{5}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{3x-5}{5}\right) = -\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 2

1. $\mathscr{A}(IAA') = \dfrac{1}{2} IH \times AA' = \dfrac{1}{2}(1-x) \times 2y = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

2. (a) Pour tout x de $]-1;1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\sqrt{1-x^2} - \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-(1-x^2) - x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}.$$

(b) Pour tout $x \in]-1;1[$, $\sqrt{1-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $2x^2 - x - 1$.
$2x^2 - x - 1$ est un trinôme du second degré qui a pour racines 1 et $-\frac{1}{2}$.
$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.
On en déduit le tableau de variation de f :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0 ‖

3. On remarque que $f(x)$ est l'aire du triangle IAA', donc d'près le tabeau de variation précédent, l'aire est maximale est $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ pour $x = -\frac{1}{2}$.
Montrons qu'alors le triangle IAA' est un triangle équilatéral.
$I(1;0)$, $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $A'\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
$IA = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$.
On calcule de même IA' et $AA4$.
On obtient $IA = IA' = AA' + \sqrt{3}$.

Exercice 3

Partie A

1. La fonction $c : x \mapsto x^3$ est une fonction uselle, dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$c(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction c est continue et trictement croissante sur $\mathbb{R}$,
$\lim\limits_{x \to -\infty} c(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} c(x) = +\infty$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs

intermédiaires, l'équation $c(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Comme $c(1) = 1$, cette solution est 1.
On en déduit le tabeau de signe de $x^3 - 1$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x^3 - 1$		$-$	0	$+$	

3. D'après ce qui précède, $x^3 - 1 = 0 \iff x = 1$
donc l'ensemble de définition de f est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Partie B

1. f est une fonction rationnelle, elle a donc en $+\infty$ et en $-\infty$ la même limite que le quotient des termes de plus haut degré.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0.$
De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0.$
On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet comme asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to1}(2x+1) = 3$ et $\lim\limits_{x\to1}(x^3 - 1)$.
On en déduit, en utilisant le tableau de signe de la partie A :
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.
La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Partie C

1. f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^3-1) - (2x+1)\times 3x^2}{(x^3-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2 - 6x^3 - 3x^2}{(x^3-1)^2} \\ &= \frac{-4x^3 - 3x^2 - 2}{(x^3-1)^2} \end{aligned}$$
2. (a) g est une fonction polynôme, elle admet donc en $-\infty$ et en $+\infty$ les mêmes limites que son terme de plus haut degré.
$\lim\limits_{+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty}(-4x^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} g(x) = \lim\limits_{-\infty}(-4x^3) = +\infty$

   (b) g est une fonction polynôme d"rivable sur son ensemble de définition.
$g'(x) = -12x^2 - 6x = -6x(2x+1)$.
On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

(c) Sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, g admet pour maximum -2 donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.
Sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{-1}{2}\right]$, g est continue et strictement décroissante.
$\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) < -2 < 0$.
L'équation $g(x)=0$ admet donc une unique solution α dans l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{-1}{2}\right]$.
En conclusion, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
$g(-1,2)>0$, $g(-1,1)<0$ et g est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{-1}{2}\right]$ donc $-1,2<\alpha<-1,1$.

(d) On déduit du tableau de variation de g son tableau de signe :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3. Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3-1)^2}$ et $(x^3-1)^2>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Partie D : Représentation graphique de la fonction f