Contrôle n˚5

Exercice 1

1. L'affirmation est FAUSSE.
   Pour tout réel x, $e^{2x} + 3e^x > 0$.
2. L'affirmation est VRAIE.
   $(\ln x)^2 + \ln x \leqslant 0 \iff \ln x(\ln x + 1) \leqslant 0$.

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x(\ln x + 1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. L'affirmation est VRAIE.
$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1} + \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} \\ &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1} + \frac{e^x(e^{-x} + 1)}{e^x(e^{-x} - 1)} \\ &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1} + \frac{1 + e^x}{1 - e^x} \end{aligned}$$
4. L'affirmation est VRAIE.
   $\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = O$.

Exercice 2

1. (a) u est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   $u'(x) = e^x - 1$.
   Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $u'(x) \geqslant 0$ donc u est croissante sur $[0;+\infty[$.
   $u(0) = 1$ donc, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $u(x) \geqslant 1 > 0$.

   (b) φ est dérivable sur $[0;+\infty[$.
   $\varphi'(x) = e^x - x = u(x)$.
   $\varphi'(x)0$ pour tout $x \in [0;+\infty$ d'après (a), donc φ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   $\varphi(0) = 1$ donc, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant 1 > 0$.

   (c) Pour tout $x \in]0;+\infty[$:
   $\varphi(x) \geqslant 0 \iff e^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0 \iff \dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. (a) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}}$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x} = +\infty$
   et, par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) f est dérivable sur $[0;+\infty[$.
   $f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \dfrac{1}{2}x \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(-1 - \dfrac{x}{2}\right)$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$\frac{1}{\mathrm{e}}$		
	0	↗		↘	0

Exercice 3

Partie A

1. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.
   $u'(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ donc u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
   $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$.
   $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x) = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
   On en déduit le tableau de variation de u :

2. (a) u est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
   $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty$.
   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intrervalle $]0;+\infty[$.
   (b) $u(1,31) \simeq -0,014 < 0$ et $u(1,32) \simeq 0,020 > 0$ donc $1,31 < \alpha < 1,32$.
3. On en déduit le tableau de signe de $u(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Partie B

1. $f'(x) = 2x + 2(2-\ln x) \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2}{x}u(x)$.
2. $f'(x)$ a le même signe que $u(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	↘		↗	
	$\|\|$		$f(\alpha)$		

Partie C

1. $A(0;2)$ et $M(x;f(x))$
   $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{x^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
   (a) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0;+\infty[$ donc g a les mêmes variations que f sur $]0;+\infty[$.

(b) On en déduit que AM est minimale lorsque M est en $P(\alpha; f(\alpha)$.

(c) $u(\alpha) = 0 \iff \ln\alpha = 2 - \alpha^2$.
On alors $AP = \sqrt{\alpha^2 + (\ln\alpha - 2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à (Γ) en P. (on rappelle que deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1).

Exercice 4

Partie A : Etude du cas $k = 1$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.
   Pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
   Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$.
   $\mathcal{C}_1$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
2. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f_1'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $(1 - x)$.
   On en déduit le tableau de varaition de f_1 :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

3. $f_1(0) = 0$. On a donc, d'après le tableau de variation de f_1, le tableau de signe de f_1 suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B : Propriétés graphiques

1. Pour tout réel $k > 0$, $f_k(0) = 0$, donc $\mathcal{C}_k$ passe par l'origine O du repère.
2. (a) Pour tout réel $k > 0$, f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f_k'(x) = k\mathrm{e}^{-kx} + kx \times (-k\mathrm{e}^{-kx}) = k(1 - kx)\mathrm{e}^{-kx}$.

   (b) $k > 0$ et, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-kx} > 0$ donc $f_k(x)$ a le même signe que $(1 - kx)$.
   On en déduit les variations de f_k :

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{k}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

   f_k admet donc un maximum, ce maximum est $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(c) f_2 atteint son maximum en $\dfrac{1}{2}$ et f_a en $\dfrac{1}{a}$.
On a alors $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{2} \iff a > 2$.

(d) $T : y = f_k'(0)x + f_k(0) \iff y = kx$.

(e) b est le coeffcient directeur de T donc $b \simeq \dfrac{0,6}{0,2}$, soit $b \simeq 3$.