

Contrôle n°3

Exercice 1 (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Proposition : $1 + j + j^2 = 0$.

2. **Proposition :** L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |z + 1|$ est une droite.

3. Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Proposition : La forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est : $\sqrt{3}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

4. **Proposition :** Le point d'affixe $(-1 + i)^{10}$ est situé sur l'axe des ordonnées.

Exercice 2 (7 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.

A tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA) , la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM' = 2OI$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend

$$z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

- (a) Déterminer la forme algébrique de z_M .

- (b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.

Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

- (c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

- (a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y .

- (b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y .

- (c) Montrer que $z_{M'} - z_B = -2iz_I$.

- (d) En déduire que $BM' = 2OI$.

- (e) Montrer que (OI) est une hauteur du triangle OBM' .

Exercice 3 (7 points)

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
5. Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 .
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1 .
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$