Contrôle n°7

Exercice 1 (5 *points*)
On donne en annexe un cube $ABCDEFGH$.
I, J et K sont les points des segments $[AE]$, $[CG]$ et $[BF]$ tels que $AI = \frac{3}{4}AE$, $CJ = \frac{1}{2}CG$ et $BK = \frac{1}{4}BF$.

1. Les droites (IK) et (BC) sont-elles sécantes ?
2. (a) Construire le point d'intersection M de la droite (IK) avec le plan (ABC) et le point d'intersection N de la droite (JK) avec le plan (ABC).

   (b) Justifier que les droites (IJ) et (AC) sont sécantes un point P et que P est un point de la droite (MN).
3. Construire la section du cube par le plan (IJK). On expliquera cette construction.

Exercice 2 (5 *points*)
L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne d la droite passant par les points $A(1; -2; -1)$ et $B(3; -5; -2)$.

1. Démontrer qu'une représentation paramétrique de d est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2. d' est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

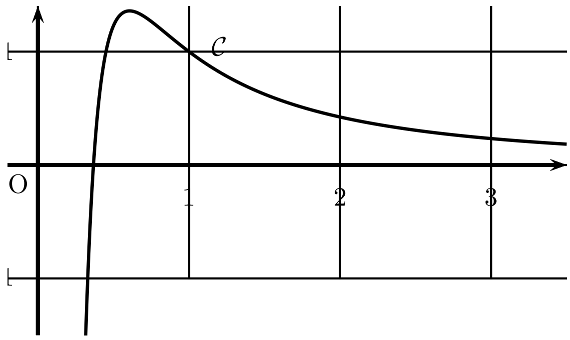
   Démontrer que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.
3. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $C(0; -3; 0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1; -4; 0)$ et $\vec{v}(0; -5; 1)$.
   Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
   Que peut-on en déduire pour la position relative de la droite d et du plan $\mathscr{P}$?

Exercice 3 (10 *points*)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1. (a) Étudier la limite de f en 0.
   (b) Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$
   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.
3. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.
   (a) Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Calculer I_n en fonction de n.
   (d) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

ANNEXE Exercice 1