Corrigé du contrôle n°3

Exercice 1

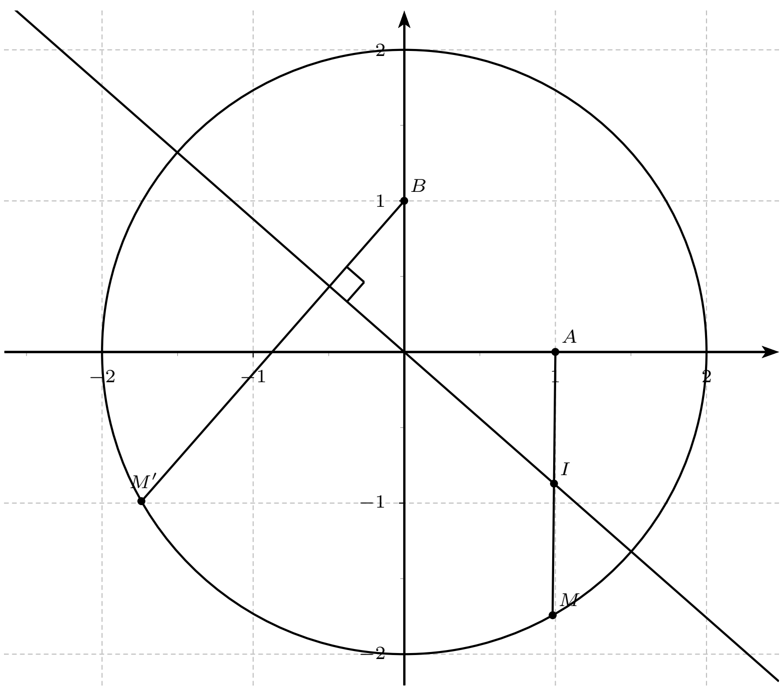
1. VRAI
   $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 1+\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = 1-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.$
2. VRAI
   Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe -1.
   $|z-\mathrm{i}| = |z+1| \iff |z-z_A| = |z-z_B| \iff AM = BM$, l'ensemble des points m est donc la médiatrice de $[AB]$.
3. VRAI
   $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\frac{11\pi}{12})} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$
4. VRAI
   $(-1+\mathrm{i})^10 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^{10} = \sqrt{2}^1 0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{30\pi}{4}} = 32\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\pi-\frac{\pi}{2})} = 32\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -32\mathrm{i}$

Exercice 2

1. (a) $z_M = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

   (b) $z_{M'} = -\mathrm{i}(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = -\mathrm{i}+\mathrm{i}^2\sqrt{3} = -\sqrt{3}-\mathrm{i}$
   $Z_{M'} = -\mathrm{i}\times 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$
   On a donc $|z_{M'}| = 2$ et $-\dfrac{5\pi}{6}$ est un argument de $z_{M'}$.

   (c)



M est le point du cercle de centre O et de rayon 2 d'abscisse 1 et d'ordonnée négative, M' est le point de ce cercle d'ordonnée -1 et d'abscisse négative.
On constate que (OI) est perpendiculaire à $[BM']$ donc (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
On vérifie également que $BM' = 2OI$.

2. (a) $z_I = \dfrac{1}{2}(z_A + z_M) = \dfrac{1}{2}(1 + x + \mathrm{i}y) = \dfrac{1+x}{2} + \mathrm{i}\dfrac{y}{2}$.
   (b) $z_{M'} = -\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = y - \mathrm{i}x$.
   (c) $z_{M'} - z_B = y - \mathrm{i}x - \mathrm{i} = y - \mathrm{i}(x+1)$
   $-2\mathrm{i}z_I = -2\mathrm{i}\left(\dfrac{1+x}{2} + \mathrm{i}\dfrac{y}{2}\right) = y - \mathrm{i}(x+1)$
   On a donc $z_{M'} = -2\mathrm{i}z_I$.
   (d) $|z_{M'} - z_B| = BM'$ et $|-2\mathrm{i}z_I| = |-2\mathrm{i}| \times |z_I| = 2OI$.
   On déduit donc de l'égalité précédente que $BM' = 2OI$.
   (e) $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{BM'} - (\vec{u}) + k \times 2\pi = \arg(z_{M'} - z_B) - \arg(z_I) + k \times 2\pi$.
   D'autre part, on a $z_{M'} - z_B = -2\mathrm{i}z_I$
   donc $\arg(z_{M'} - z_B) = \arg(-2\mathrm{i} + \arg(z_I) + k \times 2\pi = -\dfrac{\pi}{2} + \arg(z_I) + k \times 2\pi$,
   ce qui équivaut à $\arg(z_{M'} - z_B) - \arg(z_I) = -\dfrac{\pi}{2}$.
   Par conséquent $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BM'} = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$.
   (OI) est perpendiculaire à (BM'), (OI) est donc bien une hauteur du triangle OBM'.

Exercice 3

Partie A

1. $u_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - \mathrm{i}| = 2$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+\mathrm{i})z_n| = |1+\mathrm{i}| \times |z_n| = \sqrt{2}u_n$.
   (u_n) est donc la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\sqrt{2}$.
3. Pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times (\sqrt{2})^n$.
4. $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(\sqrt{2})^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
5.

Variables	:	u est un réel
		p est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	Tant que $u \leqslant p$
	:	Affecter à u la valeur $\sqrt{2}u$
	:	Affecter à n la valeur $n+1$
	:	Fin Tant que
Sortie	:	Afficher la valeur de n

Partie B

1. $z_1 = (1+\mathrm{i})z_0 = (1+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i}) = (\sqrt{3}+1) + \mathrm{i}(\sqrt{3}-1)$
2. $z_0 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   On a donc $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.
3. On déduit de ce qui précède :
   $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\mathcal{R}e(z_1)}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
   $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\mathcal{I}m(z_1)}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$