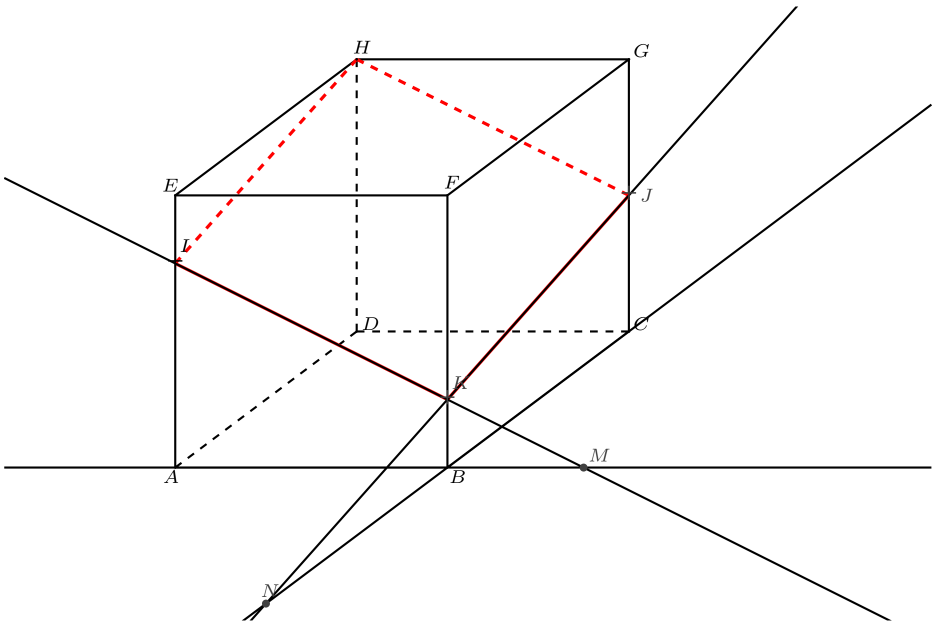
Corrigé du contrôle n°7

Exercice 1

1. La droite (IK) est contenue dans le plan $(ABFE)$, la droite (BC) est contenue dans la plan $(BCGF)$.
   L'intersection de ces deux plans est la droite (BF).
   Si les droites (IK) et (BC) étaient sécantes, leur point d'intersection appartiendrait à (BF). Or les trois droites ne sont pas concourantes car (IK) coupe (BF) en K et (BC) coupe (BF) en B. par conséquent les droites (IK) et (BC) ne sont pas sécantes.
2. (a) Les droites (IK) et (AB) sont coplanaires et sécantes en un point M.
   $M \in (AB)$ donc M est un point du plan (ABC). M est donc le point d'intersection de la droite (IK) avec le plan (ABC).
   Les droites (JK) et (BC) sont coplanaires et sécantes en un point N.
   $N \in (BC)$ donc N est un point du plan (ABC). N est donc le point d'intersection de la droite (JK) avec le plan (ABC).

   (b) (AI) est parallèle à (CJ) donc ces droites sont coplanaires. $AI = \frac{3}{2}CJ$, donc $AIJC$ n'est pas un parallélogramme. Les droites (IJ) et (AC) sont coplanaires et ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes en un point P.
   (MN) est le droite d'intersection des plans (ABC) et (IJK).
   P est un point de l'intersection de ces deux plans, donc $P \in (MN)$.
3. (IJK) coupe la face $ABFE$ suivant le segment $[IK]$ et la face $BCGF$ suivant le segment $[KJ]$.
   Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles. On a $(ADHE)$ parallèle à $(BCGF)$ et $(DCGH)$ parallèle à $(ABFE)$.
   Le plan (IJK) coupe la face $ADHE$ suivant un segment passant par I parallèle à $[KJ]$ et la face $DCGH$ suivant un segment passant par J parallèle à $[IK]$.
   Montrons que le quadrilatère $IKJH$ est un parallélogramme :
   $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.
   $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.
   On a donc $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{KJ}$.
   On en conclut que la section du cube par le plan (IJK) est le parallélogramme $IKJH$.



Exercice 2

1. Soit $M(x;y;z)$. $M \in d$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est à dire si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$ et $\overrightarrow{AM}(x-1;y+2;z+1)$.
$M \in d \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x-1=2t \\ y+2=-3t \\ z+1=-t \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-1-t \end{cases}$.
Une représentation paramétrique de d est donc bien :
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-1-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2. Le vecteur $\vec{w}(-1;2;1)$ est un vecteur directeur de d'.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, par conséquent les droites d et d' ne sont pas parallèles, elles sont soit sécantes, soit non coplanaires. Cherchons leur intersection.
$\begin{cases} 1+2t=2-t' \\ -2-3t=1+2t' \\ -1-t=t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2t+t'=1 \\ -3t-2t'=3 \\ -t-t'=1 \end{cases} \iff \begin{cases} t'=1-2t \\ -3t-2(1-2t)=3 \\ -t-(1-2t)=2 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} t'=1-2t \\ t=5 \\ t=2 \end{cases}$
Ce système n'admet pas de solution donc $d \cap d' = \emptyset$. On en déduit que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$,$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

$\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{cases} 2 = a \\ -3 = -4a - 5b \\ -1 = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ -3 = -8 + 5 \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

On a donc : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} - \vec{v}$. On en déduit que la droite d est soit strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$, soit contenue dans le plan $\mathscr{P}$.
Le point A est un point de $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
$\overrightarrow{CA}(1; 1; -1)$

$\overrightarrow{CA} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{cases} 1 = a \\ 1 = -4a - 5b \\ -1 = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ 1 = -4 + 5 \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

$\overrightarrow{CA} = \vec{u} - \vec{v}$, donc $A \in \mathscr{P}$.
$d \cap \mathscr{P} \neq \emptyset$ donc la droite d est contenue dans $\mathscr{P}$.

Exercice 3

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ avec $x^2 > 0$ donc, par quotient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

   (b) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
   Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (c) Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2. (a) Pour tout $x \in]0;+\infty[$:
   $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1+\ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{-1-2\ln x}{x^3}.$$

   (b) $-1 - 2\ln x > 0 \iff \ln x < -\dfrac{1}{2} \iff x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.
   Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-1-2\ln x$. On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$:

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   (c) Et le tableau des variations de la fonction f :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	$\searrow$	0

3. (a) $f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$, donc $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse e^{-1}.

   (b) On en déduit, à l'aide du tableau de variation de f, le signe de $f(x)$:

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4. (a) f est continue et positive sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}};+\infty\right[$ donc $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{n} f(x)\mathrm{d}x$.
   $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{2} f(x)\mathrm{d}x$
   D'après le tableau de variation, on a :
   pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{\mathrm{e}};2\right]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}$ donc, d'après les inégalités de la moyenne :
   $0 \leqslant I_2 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}\left(2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, soit $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

(b) Pour tout $x \in]0;+\infty[$:
$F'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x} \times x + 2 + \ln x}{x^2} = \dfrac{1 + \ln x}{x^2} = f(x)$.
F est donc une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

(c) $I_n = F(n) - F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{-2 - \ln n}{n} + \mathrm{e}$.

(d) $I_n = -\dfrac{2}{n} - \dfrac{\ln n}{n} + \mathrm{e}$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.
On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \mathrm{e}$.