Contrôle n˚2

Exercice 1 (6 *points*)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On justifiera le réponse.

1. N est un entier naturel dont l'écriture décimale est $\overline{aba7}$.
   Si N est divisible par 7, alors $a+b$ est divisible par 7.
2. x est un entier naturel non nul.
   Si $x^3 \equiv 0[9]$, alors $x \equiv 0[3]$.
3. Soit a et b deux entiers et n un entier naturel, $n \geqslant 2$.
   Si $ab \equiv 0[n]$, alors $a \equiv 0[n]$ ou $b \equiv 0[n]$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 2 (6 *points*)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soit un entier naturel $m \geqslant 2$.
Démontrer que, pour tous entiers a, b, c et d, si $a \equiv b[m]$ et $c \equiv d[m]$, alors $ac \equiv bd[m]$.

Partie B
On considère l'équation dans $\mathbb{Z}$: $7x^2 + 2y^3 = 3$ (E)

1. Montrer que, si un couple d'entiers relatifs est solution de l'équation (E), alors $2y^3 \equiv 3[7]$.
2. Recopier et compléter le tableau de congruence modulo 7 suivant :

y	0	1	2	3	4	5	6
y^3							
$2y^3$							

3. L'équation (E) a-t-elle des solutions dans $\mathbb{Z}$?

Exercice 3 (5 *points*)

Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste dans la division euclidienne par 5 de 2^n et 3^n.
En déduire pour quelles valeurs de l'entier n le nombre $1188^n + 2257^n$ est divisible par 5.

Exercice 4 (3 *points*)

On considère un polynôme P à coefficients entiers relatifs :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

1. Montrer que toute racine entière de P non nulle divise a_0.
2. En déduire que le polynôme $x^3 - 2x^2 + 4x - 10$ n'a pas de racine entière.