Corrigé du contrôle n°1

Exercice 1

Soit, pour n entier naturel, la propriété P_n : $7^n - 2^n$ est divisible par 5.
Initialisation P_0 : $7^0 - 2^0$ divisible par 5 est vraie car $7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$.
Hérédité Supposons que, pour un entier naturel n, P_n est vraie, soit $7^n - 2^n$ divisible par 5.
$7^{n+1} - 2^{n+1} = 7^n \times 7 - 2^n \times 2 = 7^n \times 5 + 7^n \times 2 - 2^n \times 2 = 7^n \times 5 + (7^n - 2^n) \times 2$.
5 divise $7^n - 2^n$ et 5, donc 5 divise toute combinaison linéaire de $7^n - 2^n$ et de 5, en particulier $7^n \times 5 + (7^n - 2^n) \times 2 = 7^{n+1} - 2^{n+1}$.
On a donc démontré que P_{n+1} est vraie.
Conclusion D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 2

Si $(a+4)(b-1) = 14$, alors $a+4$ et $b-1$ sont des diviseurs de 14.
Déterminons l'ensemble des diviseurs de 14.
La décomposition en produit de facteurs premiers de 14 est : $14 = 2 \times 7$. L'ensemble des diviseurs de 14 est donc : $\{-14; -7; -2; -1; 1; 2; 7; 14\}$.
Comme a est un entier naturel, on a $a + 4 \geqslant 4$.
On a donc :
$(a+b)(b-1) = 14 \iff \begin{cases} a+4=7 \\ b-1=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+4=14 \\ b-1=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a3=7 \\ b=3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=10 \\ b=2 \end{cases}$
L'ensemble des solutions est donc : $\mathscr{S} = \{(3;3), (10;2)\}$.

Exercice 3

$a = 64q + q^3$ avec $0 \leqslant q^3 < 64$.
Les valeurs possibles de q sont $q = 0$, $q = 1$, $q = 2$ ou $q = 3$.
Si $q = 0$, alors $a = 0$.
Si $q = 1$, alors $a = 65$
Si $q = 2$, alors $a = 136$.
Si $q = 3$, alors $a = 219$.
L'ensemble des solutions est : $\mathscr{S} = \{0; 65; 136; 219\}$.

Exercice 4

La division euclidienne de $2n^2 - n + 2$ par $2n$ s'écrit : $2n^2 - n + 2 = 2nq + r$ où q et r sont des entiers avec $0 \leqslant r < 2n$.
Si $n \leqslant 2$, on a $2n^2 - n + 2 = 2n \times n + (-n+2)$ et $r = -n + 2$. On a bien $0 \leqslant -n + 2 < 2n$.
Si $n > 2$, $2n^2 - n + 2 = 2n(n-1) + (n+2)$ et $r = n + 2$. On a bien $0 \leqslant n + 2 < 2n$.

Exercice 5 (3 *points*)

$250 = b \times q + 7 \iff b \times q = 243$ avec q entier et $7 < b$.
$500 = b \times q' + 5 \iff b \times q' = 495$ avec q' entier et $5 < b$.
Les solutions sont donc les diviseurs positif de 243 et de 495 supérieurs à 7.
Les décompositions en facteurs premiers de 243 et 495 sont : $243 = 3^5$ et $495 = 3^2 \times 5 \times 11$.
Les seuls diviseurs positifs communs à 243 et 495 sont 1 ; 3 et 9.
La valeur de b est donc 9.

Exercice 6

Le nombre n désigne un entier naturel.

1. $n^2+5n+4=(n+1)(n+4)$ et $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$ donc $n+1$ divise n^2+5n+4 et n^2+3n+2.
2. On remarque que $3n^2+15n+19=3(n^2+5n+4)+7$
   Si $n+1$ divise $3n^2+15n+19$, comme il divise aussi n^2+5n+4, il divise aussi $(3n^2+15n+19)-3(n^2+5n+4)=7$.
   7 est un nombre premier donc les seuls diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7.
   Donc $n+1=1$ ou $n+1=7$ qui équivaut à $n=0$ ou $n=6$.
   Réciproquement :
   si $n=0$, alors $n+1=1$ et $3n^2+15n+19=19$ donc $n+1$ divise $3n^2+15n+19$.
   si $n=6$, $n+1=7$ et $3n^2+15n+19=217=7\times 31$ donc $n+1$ divise $3n^2+15n+19$.
   On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathscr{S}=\{0;6\}$.
3. On a vu que $n+1$ divise n^2+3n+2, donc, si n^2+3n+2 divise $3n^2+15n+19$, alors $n+1$ divise $3n^2+15n+19$.
   D'après la question précédente, $n=0$ ou $n=6$.
   Si $n=0$, $n^2+3n+2=2$ et $3n^2+15n+19=19$ donc n^2+3n+2 ne divise pas $3n^2+15n+19$.
   Si $n=6$, $n^2+3n+2=56$ et $3n^2+15n+19=217$ et $217=3\times 56+49$ donc n^2+3n+2 ne divise pas $3n^2+15n+19$.
   On en conclut que, pour tout entier naturel n, n^2+3n+2 ne divise pas $3n^2+15n+19$.