Contrôle n˚2

Exercice 1

1. L'affirmation est vraie.
   $N = 1010a + 100b + 7 \equiv 2(a + b)[7]$.
   Si N est divisible par 7, alors $2(a + b)$ est divisible par 7.
   On dresse un tableau de congruence modulo 7 :

x	0	1	2	3	4	5	6
$2x$	0	2	4	6	1	3	5

   $2x \equiv 0[7]$ si et seulement si $x \equiv 0[7]$ donc si $2(a + b)$ est divisible par 7, $a + b$ est divisible par 7.
2. L'affirmation est vraie.
   On dresse un tableau de congruence modulo 9 :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8

   $x^3 \equiv 0[9]$ si et seulement si $x \equiv 0, 3$ ou $6[9]$, c'est à dire si et seulement si x s'écrit $9k$, $9k + 3$ $9k + 6$, avec $k \in \mathbb{Z}$, x est donc divisible par 3.
3. L'affirmation est fausse.
   Contre-exemple : si $a \equiv 2[6]$ et $b \equiv 3[6]$, alors $ab \equiv 0[6]$.
4. L'affirmation est vraie.
   $31 \equiv 5[13]$ et $18 \equiv 5[13]$ donc $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 5^{4n+1} + 18^{4n-1}[13]$.
   $5^4 \equiv 1[13]$ et $5^3 \equiv 813$. $5^{4n+1} + 18^{4n-1} = (5^4)^n \times 5 + (5^4)^{n-1} \times 5^3 \equiv 5 + 8[13]$ donc $5^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$.
   Par conséquent $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$, c'est-à dire $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ divisible par 13.

Exercice 2

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Si $a \equiv b[m]$, alors m divise $b - a$.
Si $c \equiv d[m]$, alors m divise $d - c$.
m divise alors toute combinaison linéaire de $b - a$ et $d - c$.
$bd - ac = (b - a)d + a(d - c)$ donc m divise $bd - ac$, ce qui signifie : $ac \equiv bd$.

Partie B

1. $7x^2 \equiv 0[7]$ donc $7x^2 + 2y^3 \equiv 2y^3[7]$.
   Si $7x^2 + 2y^3 = 3$, alors $2y^3 \equiv 3[7]$.
2. Tableau de congruence modulo 7 :

y	0	1	2	3	4	5	6
y^3	0	1	1	6	1	6	6
$2y^3$	0	2	2	5	2	5	5

3. $2y^3$ n'est congru à 3 modulo 7 pour aucun entier y, donc l'équation (E) n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3

$2^1 \equiv 2[5]$, $2^2 \equiv 4[5]$, $2^3 \equiv 3[5]$, $2^4 \equiv 1[5]$.
On en déduit que, pour tout entier naturel k :
$2^{4k} \equiv 1[5]$, $2^{4k+1} \equiv 2[5]$, $2^{4k+2} \equiv 4[5]$, $2^{4k+3} \equiv 3[5]$.
$3^1 \equiv 3[5]$, $3^2 \equiv 4[5]$, $3^3 \equiv 2[5]$, $3^4 \equiv 1[5]$.
On en déduit que, pour tout entier naturel k :
$3^{4k} \equiv 1[5]$, $3^{4k+1} \equiv 3[5]$, $3^{4k+2} \equiv 2[5]$, $3^{4k+3} \equiv 2[5]$.

On remarque que $1188 \equiv 3[5]$ et $2257 \equiv 2[5]$ donc $1188^n + 2257^n \equiv 3^n + 2^n[5]$.
Si $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, alors $3^n + 2^n \equiv 2[5]$, si $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, alors $3^n + 2^n \equiv 0[5]$, si $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$, alors $3^n + 2^n \equiv 3[5]$, si $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$, alors $3^n + 2^n \equiv 0[5]$.
Les entiers n pour lesquels $1188^n + 2257^n$ est divisible par 5 sont les entiers $4k+1$ ou $4k+3$, pour $k \in \mathbb{N}$, ou encore les entier naturels impairs.

Exercice 4

On considère un polynôme P à coefficients entiers relatifs :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

1. Soit u une racine entière non nulle de P.
   Alors : $a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_1 u + a_0 = 0 \iff a_0 = -a_n u^n - a_{n-1}u^{n-1} - \cdots - a_1 u$.
   u divise $-a_n u^n - a_{n-1}u^{n-1} - \cdots - a_1 u$ donc u divise a_0.
2. Si u est une racine entière de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 10$, alors u divise 10.
   L'ensemble des diviseurs de 10 est : $\{-10; -5; -2; -1; 1; 2; 5; 10\}$.
   $P(-10) = -1250$, $P(-5) = -205$, $P(-2) = -34$, $P(-1) = -17$, $P(1) = -7$, $P(2) = -2$, $P(5) = 85$ et $P(10) = 830$.
   Aucun des diviseurs de 10 n'est racine de P, donc P n'a pas de racine entière.